

Transformation de Fourier

C.1. Transformation de Fourier des fonctions sommables

Définition C.1.1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de f est la fonction $\mathcal{F}f$, ou encore \hat{f} , définie sur \mathbb{R}^d par

$$\mathcal{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Le théorème de convergence dominée et le théorème de Fubini permettent facilement de démontrer le résultat suivant.

Proposition C.1.2. Soient f, g dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors

- a) $\mathcal{F}f$ est continue sur \mathbb{R}^d , $\|\mathcal{F}f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$ et $\mathcal{F}f(\xi)$ tend vers zéro à l'infini;
- b) On a $\mathcal{F}(f \star g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$.

La proposition suivante montre que la transformation de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini.

Proposition C.1.3. Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, soit m un entier dans \mathbb{N} et soit $a \in \mathbb{R}^d$.

- a) Si $\langle x \rangle^m \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\mathcal{F}\varphi \in C^m(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $|\alpha| \leq m$

$$(i\partial)_\xi^\alpha (\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(x^\alpha \varphi)(\xi). \quad (\text{C.1})$$

- b) Si $\varphi \in C^m(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $|\alpha| \leq m$, alors

$$\forall |\alpha| \leq m, \quad \mathcal{F}(\partial_x^\alpha \varphi)(\xi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}\varphi(\xi). \quad (\text{C.2})$$

- c) La transformée de Fourier de la fonction $(\tau_a)_* \varphi := \varphi(\cdot - a)$ est donnée par

$$\mathcal{F}((\tau_a)_* \varphi)(\xi) = e^{-i\xi \cdot a} \mathcal{F}\varphi(\xi).$$

- d) La transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{ia \cdot x} \varphi(x)$ est donnée par

$$\mathcal{F}(e^{ia \cdot x} \varphi)(\xi) = (\tau_a)_* \mathcal{F}\varphi(\xi).$$

Démonstration. Nous ne démontrons que les deux premiers points, les autres sont laissés en exercice.

- a) Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, telle que $\langle x \rangle^m \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$. L'application

$$\xi \mapsto e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x)$$

est de classe C^∞ pour presque tout x et l'on a

$$\partial_{\xi_j} (e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x)) = -ix_j e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x)$$

et comme

$$|ix_j e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x)| = |x_j \varphi(x)|$$

on peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale pour en déduire que

$$\partial_{\xi_j} (\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(-ix_j \varphi)(\xi).$$

Par récurrence on obtient

$$\partial_{\xi}^{\alpha}(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (-i)^{\alpha} \mathcal{F}(x^{\alpha}\varphi)(\xi),$$

d'où le résultat (C.1).

b) Pour démontrer (C.2) commençons par étudier le cas $m = 1$. Considérons une suite régularisante ζ_{ε} et posons

$$\varphi_{\varepsilon} := \zeta_{\varepsilon} \star \varphi.$$

Alors

$$\varphi_{\varepsilon} \longrightarrow \varphi \quad \text{et} \quad \partial_{x_j} \varphi_{\varepsilon} \longrightarrow \partial_{x_j} \varphi \quad \text{dans} \quad L^1(\mathbb{R}^d).$$

Une intégration par parties (utilisant le fait que φ_{ε} tend vers zéro à l'infini pour tout $\varepsilon > 0$) montre que

$$\int e^{-ix_j \xi_j} \partial_{x_j} \varphi_{\varepsilon}(x) dx_j = i \xi_j \int e^{-ix_j \xi_j} \varphi_{\varepsilon}(x) dx_j$$

donc

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} \varphi_{\varepsilon})(\xi) = i \xi_j \mathcal{F} \varphi_{\varepsilon}(\xi).$$

Comme

$$\|\mathcal{F}(\partial_{x_j} \varphi_{\varepsilon}) - \mathcal{F}(\partial_{x_j} \varphi)\|_{L^{\infty}} \leq \|\partial_{x_j} \varphi_{\varepsilon} - \partial_{x_j} \varphi\|_{L^1}$$

et de même pour $\mathcal{F} \varphi_{\varepsilon}(\xi) - \mathcal{F} \varphi(\xi)$, le résultat suit. Le cas général s'obtient de même. La proposition est démontrée. \square

Lemme C.1.4. Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive de taille d , et posons

$$G_A(x) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(A)}} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x) \cdot x}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Alors $G_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\mathcal{F}G_A(\xi) = e^{-\frac{1}{2}(A\xi) \cdot \xi}.$$

Démonstration. La matrice A est symétrique réelle donc on peut écrire

$$A = QDQ^t, \quad \text{avec} \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$$

avec Q matrice orthogonale et D matrice diagonale avec tous les λ_j réels. Par ailleurs quitte à permuter l'ordre des vecteurs propres on peut toujours supposer $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0$, et comme $A = A^t > 0$ on a $\lambda_d > 0$. Montrons tout d'abord que G_A est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$

$$\partial^{\beta} G_A(x) = P_{\beta}(x) e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x) \cdot x}$$

où P_{β} est une fonction polynôme, donc

$$|\partial^{\beta} G_A(x)| \leq |P_{\beta}(x)| e^{-|x|^2/2\lambda_1}$$

ce qui donne le résultat.

La première étape consiste à se ramener au cas où $d = 1$. Dans l'intégrale définissant la transformée de Fourier de G_A on pose

$$y := Q^t x \quad \text{et} \quad \eta := Q^t \xi.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}G_A(\xi) &= \int e^{-ix \cdot \xi} G_A(x) dx = \left(\prod_{j=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}} \right) \int e^{-iQ^t x \cdot Q^t \xi} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x) \cdot x} dx \\
&= \left(\prod_{j=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}} \right) \int e^{-iy \cdot \eta} e^{-\frac{1}{2}(D^{-1}y) \cdot y} dy \\
&= \left(\prod_{j=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}} \right) \int \left(\prod_{j=1}^d e^{-iy_j \eta_j} e^{-\frac{1}{2}\lambda_j^{-1} y_j^2} \right) dy_1 \dots dy_d \\
&= \prod_{j=1}^d \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}} e^{-iy_j \eta_j} e^{-\frac{1}{2}\lambda_j^{-1} y_j^2} dy_j.
\end{aligned}$$

Puisque $\lambda_j > 0$ pour tout j , le théorème de Fubini implique ainsi qu'il suffit de faire le calcul pour $d = 1$. Soit donc $\lambda > 0$ et posons

$$g_\lambda(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{x^2}{2\lambda}}.$$

On aura alors

$$\mathcal{F}G_A(\xi) = \prod_{j=1}^d \mathcal{F}g_{\lambda_j}(\eta_j), \quad \eta := Q^t \xi.$$

La fonction g_λ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et

$$g'_\lambda(x) = -\frac{x}{\lambda} g_\lambda(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En appliquant la transformée de Fourier à chaque membre de cette égalité et en utilisant la Proposition C.1.3 il vient

$$i\eta \mathcal{F}g_\lambda(\eta) = -\frac{i}{\lambda} (\mathcal{F}g_\lambda)'(\eta)$$

et donc

$$\mathcal{F}g_\lambda(\eta) = C e^{-\frac{1}{2}\lambda\eta^2}.$$

Comme de plus

$$\mathcal{F}g_\lambda(0) = C = \int g_\lambda(x) dx = 1$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}G_A(\xi) &= \prod_{j=1}^d \mathcal{F}g_{\lambda_j}(\eta_j) \\
&= \prod_{j=1}^d e^{-\frac{1}{2}\lambda_j \eta_j^2} \\
&= e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \lambda_j \eta_j^2} \\
&= e^{-\frac{1}{2} D \eta \cdot \eta} = e^{-\frac{1}{2} A \xi \cdot \xi}.
\end{aligned}$$

Le lemme est démontré. □

Théorème C.1.5 (Inversion de Fourier). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors on a presque partout sur \mathbb{R}^d*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \mathcal{F}f(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \overline{\mathcal{F}(\mathcal{F}f)}(x),$$

où pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{F}g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} g(\xi) d\xi.$$

Démonstration. Si nous calculons la valeur au point x de $\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \mathcal{F}f(\xi) d\xi$ nous trouvons

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy \cdot \xi} f(y) dy \right) d\xi$$

mais le théorème de Fubini ne peut s'appliquer. L'idée est d'évaluer à la place l'intégrale

$$I_\varepsilon(x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y) \cdot \xi} e^{-\varepsilon \frac{|\xi|^2}{2}} f(y) dy d\xi,$$

de deux façons différentes.

On commence par intégrer d'abord par rapport à y , on a alors

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} e^{-\varepsilon \frac{|\xi|^2}{2}} \mathcal{F}f(\xi) d\xi$$

et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue il vient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \mathcal{F}f(\xi) d\xi.$$

Mais en intégrant d'abord par rapport à ξ on peut utiliser le Lemme C.1.4 avec $A = \varepsilon^{-1} \text{Id}$, qui implique que

$$\frac{\varepsilon^{\frac{d}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x-y) \cdot \xi} e^{-\varepsilon \frac{|\xi|^2}{2}} d\xi = e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}}.$$

On obtient alors

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\varepsilon})^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}} dy.$$

En d'autres termes

$$I_\varepsilon = g_\varepsilon \star f, \quad \text{avec} \quad g_\varepsilon(x) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi\varepsilon})^d} e^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon}}$$

et donc $I_\varepsilon(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout x et le résultat suit par unicité de la limite. \square

C.2. Transformation de Fourier des fonctions de la classe de Schwartz

Théorème C.2.1. *La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, d'inverse $(2\pi)^{-d} \overline{\mathcal{F}}$ avec les notations du Théorème C.1.5.*

Démonstration. On déduit facilement de la Proposition C.1.3 que la transformée de Fourier applique $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même. En effet on a pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(i\xi)^\alpha (i\partial_\xi)^\beta \mathcal{F}\varphi(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} \partial_x^\alpha (x^\beta \varphi(x)) dx$$

donc

$$\begin{aligned} \sup_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq p} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left| \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}\varphi(\xi) \right| &\leq \sup_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq p} \left\| \partial_x^\alpha (x^\beta \varphi) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \sup_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq p} \left\| \langle x \rangle^{|\beta|} \partial_x^\alpha \varphi \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

par la formule de Leibniz. On remarque que

$$\int \langle x \rangle^{|\beta|} |\partial_x^\alpha \varphi(x)| dx \leq \int \langle x \rangle^{-d-1} \langle x \rangle^{|\beta|+d+1} |\partial_x^\alpha \varphi(x)| dx$$

donc puisque $x \mapsto \langle x \rangle^{-d-1}$ est intégrable sur \mathbb{R}^d on obtient

$$\sup_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq p} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left| \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}\varphi(\xi) \right| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq p+d+1} \left\| \langle x \rangle^{|\beta|} \partial_x^\alpha \varphi(x) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

La transformée de Fourier applique donc bien $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même et on conclut grâce au théorème d'inversion de Fourier C.1.5 puisque φ et $\mathcal{F}\varphi$ sont en particulier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. \square

Théorème C.2.2 (Formule de Parseval). *Soient φ , ψ et Ψ trois fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors*

$$a) \int \mathcal{F}\varphi(\xi) \psi(\xi) d\xi = \int \varphi(x) \mathcal{F}\psi(x) dx$$

$$b) \int \varphi(x) \overline{\Psi}(x) dx = (2\pi)^{-d} \int \mathcal{F}\varphi(\xi) \overline{\mathcal{F}\Psi}(\xi) d\xi.$$

Démonstration. a) Grâce au théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned} \int \mathcal{F}\varphi(\xi) \psi(\xi) d\xi &= \int \left(\int e^{-i\xi \cdot x} \varphi(x) dx \right) \psi(\xi) d\xi \\ &= \int \left(\int e^{-i\xi \cdot x} \psi(\xi) d\xi \right) \varphi(x) dx \\ &= \int \varphi(x) \mathcal{F}\psi(x) dx, \end{aligned}$$

ce qui démontre a).

b) Soit maintenant $f := (2\pi)^{-d} \overline{\mathcal{F}\Psi}$, qui vérifie

$$\mathcal{F}f(x) = \overline{\Psi}(x).$$

En appliquant a) à φ et f on trouve

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-d} \int \mathcal{F}\varphi(\xi) \overline{\mathcal{F}\Psi}(\xi) d\xi &= \int \mathcal{F}\varphi(\xi) f(\xi) d\xi \\ &= \int \varphi(x) \overline{\Psi}(x) dx \end{aligned}$$

et le théorème est démontré. \square

C.3. Transformation de Fourier des distributions tempérées

La transformation de Fourier des distributions tempérées se définit par dualité, grâce au Théorème C.2.2.

Définition C.3.1. *Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution tempérée. La transformée de Fourier de S est la distribution $\mathcal{F}S$ définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle \mathcal{F}S, \varphi \rangle := \langle S, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

Notons qu'au vu de la démonstration du Théorème C.2.1, la distribution $\mathcal{F}S$ ainsi définie est bien une distribution tempérée.

Remarque. On a aussi

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle \overline{\mathcal{F}S}, \varphi \rangle = \langle S, \overline{\mathcal{F}\varphi} \rangle.$$

Proposition C.3.2. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors la transformée de Fourier de la distribution T_f est la distribution tempérée définie par $\mathcal{F}T_f$: on a*

$$\mathcal{F}T_f = T_{\mathcal{F}f}.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\langle \mathcal{F}T_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \mathcal{F}\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi \right) dx.$$

La fonction

$$(x, \xi) \mapsto f(x)\varphi(\xi)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ donc le théorème de Fubini implique que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \right) d\xi$$

et donc

$$\langle \mathcal{F}T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) \mathcal{F}f(\xi) d\xi,$$

d'où le résultat. \square

Théorème C.3.3. *La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, d'inverse $(2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}}$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le Théorème C.2.1 en notant que pour toute distribution $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}S, \varphi \rangle &= \langle S, \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi \rangle = (2\pi)^d \langle S, \varphi \rangle, \\ \langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}S, \varphi \rangle &= \langle S, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle = (2\pi)^d \langle S, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Le résultat suit. \square

Proposition C.3.4. *Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de distributions tempérées convergeant vers S dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $\mathcal{F}S_n$ converge vers $\mathcal{F}S$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Il suffit d'écrire pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle \mathcal{F}S_n, \varphi \rangle = \langle S_n, \mathcal{F}\varphi \rangle \longrightarrow \langle S, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}S, \varphi \rangle.$$

La proposition suit. \square

Proposition C.3.5. *Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution tempérée. Alors*

a) *Si S est paire - resp. impaire - (au sens où $\check{S} = S$ - resp. $\check{S} = -S$) alors $\mathcal{F}S$ est paire (resp. impaire).*

b) *Pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ on a*

$$\mathcal{F}(\partial_k S) = i\xi_k \mathcal{F}S.$$

c) *Pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ on a*

$$\mathcal{F}(x_k S) = i\partial_{\xi_k} \mathcal{F}S.$$

d) *Si τ_a est la translation de vecteur a , alors en définissant $S \circ \tau_a$ par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle S \circ \tau_a, \varphi \rangle := \langle S, \varphi \circ \tau_{-a} \rangle$$

on a

$$\mathcal{F}(S \circ \tau_a) = e^{ia \cdot \xi} \mathcal{F}S.$$

e) *Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$\mathcal{F}(e^{ia \cdot x} S) = (\mathcal{F}S) \circ \tau_a.$$

f) Si h_λ est la dilatation de rapport λ définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle S \circ h_\lambda, \varphi \rangle := |\lambda|^{-d} \langle S, \varphi \circ h_{\lambda^{-1}} \rangle$$

alors

$$\mathcal{F}(S \circ h_\lambda) = |\lambda|^{-d} h_{\lambda^{-1}} \mathcal{F}S;$$

Démonstration. On ne va démontrer que deux points, les autres sont laissés en exercice. Soit une fonction φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

b) On a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\partial_k S), \varphi \rangle &= \langle \partial_k S, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= -\langle S, \partial_k \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= -\langle S, \mathcal{F}(-i\xi_k \varphi) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}S, i\xi_k \varphi \rangle = \langle i\xi_k \mathcal{F}S, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(x_k S), \varphi \rangle &= \langle x_k S, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= -\langle S, x_k \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= -\langle S, \mathcal{F}(-i\partial_{\xi_k} \varphi) \rangle \\ &= -i \langle \mathcal{F}S, \partial_{\xi_k} \varphi \rangle = \langle i\partial_{\xi_k} \mathcal{F}S, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

La proposition suit. □

Exemple (Transformation de Fourier de la masse de Dirac). On a

$$\mathcal{F}\delta_0 = 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),$$

et plus généralement pour tout $a \in \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{F}\delta_a(\xi) = e^{-i\xi \cdot a}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

En outre

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha \delta_0)(\xi) = (i\xi)^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

et plus généralement pour tout $a \in \mathbb{R}^d$

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha \delta_a)(\xi) = (i\xi)^\alpha e^{-i\xi \cdot a}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Exemple (Transformation de Fourier des polynômes). On a

$$\mathcal{F}1 = (2\pi)^d \delta_0,$$

et

$$\mathcal{F}x^\alpha = (2\pi)^d i^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta_0.$$

Proposition C.3.6. *Toute distribution tempérée harmonique dans \mathbb{R}^d est une fonction polynômiale.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\Delta T = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

On sait que

$$\mathcal{F}(\Delta T) = -|\xi|^2 \mathcal{F}T = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),$$

donc \mathcal{FT} est une distribution à support réduit à $\{0\}$. C'est donc une combinaison linéaire de la masse de Dirac et de ses dérivées, d'après le Théorème B.4.5. On a donc pour un entier m

$$\mathcal{FT} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0.$$

Comme

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha \delta_0) = (i\xi)^\alpha$$

le théorème d'inversion de Fourier C.3.3 implique que

$$T = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (-i\xi)^\alpha.$$

Le résultat suit. \square

C.4. Transformation de Fourier des fonctions de carré sommable

On note pour toutes fonctions φ et ψ de $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$(\varphi|\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)} := \int \varphi(x) \overline{\psi}(x) dx.$$

On rappelle qu'il s'agit d'un produit scalaire qui fait de $L^2(\mathbb{R}^d)$ un espace de Hilbert.

Théorème C.4.1 (Plancherel). *La transformation de Fourier définie dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est un isomorphisme de l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, d'inverse $(2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}}$. En outre on a*

$$(\varphi|\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d} (\mathcal{F}\varphi|\mathcal{F}\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

pour tous φ et ψ de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}$ est une isométrie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même pour la norme L^2 , c'est-à-dire que $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}$ conserve le produit scalaire défini ci-dessus. Soient donc φ et ψ deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int \varphi(x) \overline{\psi}(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mathcal{F}\varphi(\xi) \overline{\mathcal{F}\psi}(\xi) d\xi$$

par la formule de Parseval (Théorème C.2.2 b)) donc $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}$ conserve le produit scalaire et donc la norme L^2 , pour les éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il en est de même de $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\overline{\mathcal{F}}$.

Il s'agit donc maintenant d'étendre ce résultat aux éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ contient $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, il est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Soit donc $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors par isométrie, la suite $(\mathcal{F}f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et elle converge donc vers une limite g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ s'identifiant à un sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $(\mathcal{F}f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{F}f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la Proposition C.3.4, et donc par unicité de la limite $\mathcal{F}f = g$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}f$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Par continuité de la norme on a de plus

$$(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

En appliquant le même raisonnement à $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\overline{\mathcal{F}}$ on conclut que $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\overline{\mathcal{F}}$ et $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}$ sont deux isométries de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, dont les composées à droite et à gauche sont égales à l'identité, et le théorème est démontré. \square

C.5. Transformation de Fourier des distributions à support compact

On définit pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ la fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}^d

$$e_\xi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto e^{-ix \cdot \xi} . \end{array}$$

Proposition C.5.1. *Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de E est la fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}^d donnée par*

$$\mathcal{F}E(\xi) := \langle E, e_\xi \rangle .$$

De plus $\mathcal{F}E$ est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées, au sens où pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et une constante C tels que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\partial^\alpha \mathcal{F}E(\xi)| \leq C \langle \xi \rangle^m .$$

Démonstration. Soit la fonction

$$v(\xi) := \langle E, e_\xi \rangle .$$

En remarquant que

$$v(\xi) = \langle E, \chi e_\xi \rangle$$

avec $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ valant 1 au voisinage du support de E , on peut appliquer le théorème de dérivation sous le crochet qui implique que v est de classe C^∞ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\begin{aligned} \partial_\xi^\alpha v(\xi) &= \langle E, \chi \partial_\xi^\alpha e_\xi \rangle \\ &= \langle E, (-i \cdot)^\alpha \chi e_\xi \rangle . \end{aligned}$$

Montrons que v est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées. Soit K un voisinage compact du support de E et p l'ordre de E . Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe une constante C telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\partial_\xi^\alpha v(\xi)| \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\beta| \leq p} |\partial_x^\beta (x^\alpha \chi(x) e_\xi(x))| \leq C \langle \xi \rangle^p .$$

Montrons enfin que $\mathcal{F}E = v$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors d'après le théorème d'intégration sous le crochet, on a

$$\begin{aligned} \langle v, \varphi \rangle &= \int v(\xi) \varphi(\xi) d\xi \\ &= \int \langle E, e_\xi \rangle \varphi(\xi) d\xi \\ &= \langle E, \int e_\xi \varphi(\xi) d\xi \rangle \\ &= \langle E, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}E, \varphi \rangle \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition. □

Proposition C.5.2. *Si $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors on a dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*

$$\mathcal{F}(S \star E) = \mathcal{F}E \mathcal{F}S .$$

Démonstration. Nous allons commencer par traiter le cas particulier de la convolution d'une distribution E de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et d'une fonction ψ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On sait par la Proposition B.7.3 que $E \star \psi$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On écrit alors, grâce au Théorème B.4.9 d'intégration sous le crochet,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(E \star \psi)(\xi) &= \int e^{-ix \cdot \xi} \langle E, \psi(x - \cdot) \rangle dx \\ &= \langle E, \int e^{-ix \cdot \xi} \psi(x - \cdot) dx \rangle.\end{aligned}$$

Mais

$$\int e^{-ix \cdot \xi} \psi(x - y) dx = \mathcal{F}\psi(\xi) e^{-iy \cdot \xi}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(E \star \psi)(\xi) &= \langle E, \mathcal{F}\psi(\xi) e_{\xi} \rangle \\ &= \mathcal{F}\psi(\xi) \langle E, e_{\xi} \rangle \\ &= \mathcal{F}\psi(\xi) \mathcal{F}E(\xi),\end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé.

Ce résultat se généralise par densité au cas où ψ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$: en effet si $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers ψ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{F}(E \star \psi_n) = \mathcal{F}\psi_n \mathcal{F}E$$

et l'on sait que $E \star \psi_n$ converge vers $E \star \psi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ grâce à (B.11). Par continuité de \mathcal{F} dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a donc

$$\mathcal{F}(E \star \psi_n) \longrightarrow \mathcal{F}(E \star \psi) \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Par ailleurs il est facile de voir que

$$\mathcal{F}\psi_n \mathcal{F}E \longrightarrow \mathcal{F}\psi \mathcal{F}E \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

donc le résultat suit.

Considérons maintenant le cas de $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On remarque que $E \star S$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ grâce à la Proposition B.7.5. Par ailleurs $\mathcal{F}S$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}E$ est une fonction de classe C^∞ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées d'après la Proposition C.5.1, donc (toujours par la Proposition B.7.5), la distribution $\mathcal{F}E \mathcal{F}S$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Montrons maintenant que $\mathcal{F}(E \star S) = \mathcal{F}E \mathcal{F}S$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\langle \mathcal{F}(E \star S), \varphi \rangle = \langle S, \check{E} \star \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

Mais par le calcul précédent

$$\begin{aligned}\check{E} \star \mathcal{F}\varphi &= (2\pi)^{-d} \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(\check{E} \star \mathcal{F}\varphi) \\ &= (2\pi)^{-d} \mathcal{F}((\overline{\mathcal{F}}\check{E})(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi)),\end{aligned}$$

donc comme $\overline{\mathcal{F}}\check{E} = \mathcal{F}E$,

$$\check{E} \star \mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}((\mathcal{F}E)\varphi).$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(E \star S), \varphi \rangle &= \langle S, \mathcal{F}((\mathcal{F}E)\varphi) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}S \mathcal{F}E, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré. \square

Théorème C.5.3. *Soit E une distribution à support compact dans \mathbb{R} . Alors la fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ donnée par $\mathcal{F}E$ se prolonge en une fonction holomorphe sur \mathbb{C} .*

Démonstration. Soient $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. fonction

$$e_{\xi+i\eta} : x \mapsto e^{-i(\xi+i\eta)x}$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , donc on peut définir la fonction sur \mathbb{R}^2

$$\forall(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \quad F(\xi, \eta) := \langle E, e_{\xi+i\eta} \rangle.$$

On montre comme ci-dessus que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. On a en particulier

$$\partial_\xi F(\xi, \eta) = \langle E, -ix e_{\xi+i\eta} \rangle \quad \text{et} \quad \partial_\eta F(\xi, \eta) = \langle E, x e_{\xi+i\eta} \rangle.$$

La fonction F vérifie donc les équations de Cauchy-Riemann

$$\forall(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, (\partial_\xi + i\partial_\eta)F = 0$$

et donc la fonction

$$(\xi + i\eta) \in \mathbb{C} \mapsto F(\xi, \eta)$$

est holomorphe. Comme par ailleurs

$$\mathcal{F}E(\xi) = \langle E, e_\xi \rangle = F(\xi, 0)$$

le résultat suit. □

C.6. Transformation de Fourier et séries de Fourier

On se place ici en dimension 1 pour simplifier l'exposition. On remarque que toute fonction continue périodique sur \mathbb{R} est bornée sur \mathbb{R} et donc définit une distribution tempérée sur \mathbb{R} . C'est l'un des avantages du cadre des distributions tempérées pour étudier la transformation de Fourier, contrairement à $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème C.6.1 (Formule sommatoire de Poisson). *La distribution*

$$T := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$$

appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}T = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}.$$

Démonstration. On note que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la somme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k)$ est finie donc T est une distribution tempérée (voir les exemples page 59). Calculons sa transformée de Fourier. On a

$$T = T \circ \tau_1$$

donc

$$\mathcal{F}T(\xi) = \mathcal{F}(T \circ \tau_1)(\xi) = e^{i\xi} \mathcal{F}T(\xi)$$

ce qui implique que le support de $\mathcal{F}T$ est inclus dans $2\pi\mathbb{Z}$. Soit maintenant χ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée dans $]-\pi/4, \pi/4[$ et égale à 1 sur $]-\pi/8, \pi/8[$. On a alors

$$\mathcal{F}T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(\cdot - 2\pi k) \mathcal{F}T.$$

Par ailleurs on peut écrire

$$0 = (e^{i\xi} - 1) \chi(\xi - 2\pi k) \mathcal{F}T = (\xi - 2\pi k) \frac{e^{i\xi} - 1}{\xi - 2\pi k} \chi(\xi - 2\pi k) \mathcal{F}T.$$

Mais on peut montrer (exercice!) que si une distribution S vérifie $(x - a)S = 0$ alors il existe une constante C_0 telle que $S = C_0\delta_a$. Il existe donc une constante C_k telle que

$$\frac{e^{i\xi} - 1}{\xi - 2\pi k} \chi(\xi - 2\pi k) \mathcal{FT} = C_k \delta_{2\pi k}.$$

Comme $\frac{e^{i\xi} - 1}{\xi - 2\pi k} \rightarrow i$ quand $\xi \rightarrow 2\pi k$ on a

$$\chi(\xi - 2\pi k) \mathcal{FT} = -iC_k \delta_{2\pi k},$$

et donc

$$\mathcal{FT} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} -iC_k \delta_{2\pi k}.$$

Il reste à calculer les coefficients C_k . On a

$$e^{i2\pi x} T = T \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

donc

$$\mathcal{FT} \circ \tau_{2\pi} = \mathcal{FT}.$$

On en conclut qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que

$$-iC_k = c \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Il s'agit donc maintenant de calculer c . Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} c \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(2\pi k + y) &= \langle \mathcal{FT}, \varphi(\cdot + y) \rangle \\ &= \langle T, \mathcal{F}(\varphi(\cdot + y)) \rangle \\ &= \langle T, e_{-y} \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}\varphi(k) e^{iky}. \end{aligned}$$

Après intégration sur $[0, 2\pi]$ il vient (en appliquant le théorème de convergence dominée pour justifier l'interversion de l'intégrale et de la série)

$$\begin{aligned} c \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx &= c \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \varphi(x) dx \\ &= c \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \varphi(2\pi k + y) dy \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}\varphi(k) \int_0^{2\pi} e^{iky} dy \\ &= 2\pi \mathcal{F}\varphi(0) \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \end{aligned}$$

donc $c = 2\pi$. Le théorème est démontré. \square

Définition C.6.2. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est dite périodique de période a si

$$T \circ \tau_a = T.$$

Proposition C.6.3. Toute distribution périodique sur \mathbb{R} est tempérée.

Démonstration. Soit ψ une fonction positive, à support dans $] - 2, 2[$ et égale à 1 sur $[-1, 1]$. Alors

$$\Psi(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(x + k)$$

est une fonction bien définie (car la somme ne fait intervenir qu'un nombre fini de termes) et on a $\Psi(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par ailleurs Ψ est 1-périodique, et la fonction

$$\phi(x) := \frac{\psi(x)}{\Psi(x)}$$

est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et vérifie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x + k) = 1.$$

Soit maintenant T une distribution 1-périodique, on a

$$T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(\cdot + k)T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\phi T) \circ \tau_k$$

puisque $T \circ \tau_k = T$ pour tout entier k . Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle (\phi T) \circ \tau_k, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi T, \varphi(\cdot - k) \rangle.$$

Mais comme $\phi T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, il existe un entier m et une constante $C > 0$ tels que dès que $|k| \geq 3$ alors

$$\begin{aligned} |\langle \phi T, \varphi(\cdot - k) \rangle| &\leq C \max_{\alpha \leq m} \sup_{|x| \leq 2} |\varphi^{(\alpha)}(x - k)| \\ &\leq \frac{C}{(|k| - 2)^2} p_{2,m}(\varphi) \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. \square

La proposition suivante fait montre comment la théorie des séries de Fourier des fonctions continues périodiques s'inscrit dans le cadre de la théorie de la transformée de Fourier des distributions tempérées.

Proposition C.6.4. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution 1-périodique. La transformée de Fourier de T est donnée par la série convergente dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$*

$$\mathcal{F}T = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{2\pi k} \quad \text{avec} \quad c_k = \mathcal{F}(\phi T)(2\pi k),$$

où $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est n'importe quelle fonction vérifiant

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x + k) = 1.$$

On remarque que si f est une fonction continue 1-périodique, alors

$$\begin{aligned} c_k &= \int (\phi T)(x) e^{-2i\pi kx} dx \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{\ell}^{\ell+1} (\phi T)(x) e^{-2i\pi kx} dx \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \phi(x + \ell) T(x) e^{-2i\pi kx} dx \\ &= \int_0^1 T(x) e^{-2i\pi kx} dx \end{aligned}$$

ce qui correspond bien au k ième coefficient de Fourier de f . Passons maintenant à la démonstration de la proposition.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle &= \left\langle \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(\cdot + k) \right) T, \mathcal{F}\varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\phi T) \circ \tau_k, \mathcal{F}\varphi \right\rangle\end{aligned}$$

car $T \circ \tau_k = T$, et donc

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle &= \left\langle \phi T, \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}\varphi)(\cdot - k) \right\rangle \\ &= \left\langle \phi T, \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}\varphi)(\cdot + k) \right\rangle.\end{aligned}$$

Mais d'après la formule sommatoire de Poisson on a (en rappelant que $e_x(\xi) := e^{-ix \cdot \xi}$),

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}\varphi)(x + k) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(\varphi e_x)(k) \\ &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k, \mathcal{F}(\varphi e_x) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{F}\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k\right), \varphi e_x \right\rangle \\ &= 2\pi \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}, \varphi e_x \right\rangle \\ &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(2\pi k) e^{-2i\pi k x}.\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi T, e_{2\pi k} \rangle \varphi(2\pi k) \\ &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(\phi T)(2\pi k) \varphi(2\pi k) \\ &= \left\langle 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(\phi T)(2\pi k) \delta_{2\pi k}, \varphi \right\rangle,\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. \square

C.7. Espaces de Sobolev

C.7.1. Espaces de Sobolev sur \mathbb{R}^d .

Définition C.7.1 (Espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$). Soit s un nombre réel. L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des distributions tempérées f telles que

$$\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^d; \langle \xi \rangle^{2s} d\xi).$$

On pose alors

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 := \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{2s} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi.$$

L'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des distributions tempérées f telles que $\mathcal{F}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^d; |\xi|^{2s} d\xi).$$

On pose

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 := \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

Proposition C.7.2. *Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ sont des espaces de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(f | g)_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{2s} \mathcal{F}f(\xi) \overline{\mathcal{F}g(\xi)} d\xi.$$

Les espaces de Sobolev homogènes $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ sont des espaces de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f | g)_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} \mathcal{F}f(\xi) \overline{\mathcal{F}g(\xi)} d\xi$$

si et seulement si $s < d/2$.

Démonstration. Le cas des espaces inhomogènes $H^s(\mathbb{R}^d)$ se traite en remarquant que la transformée de Fourier est un isomorphisme isométrique entre $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d; \langle \xi \rangle^{2s} d\xi)$.

Dans le cas des espaces homogènes commençons par supposer que $s < d/2$ et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. Alors $(\widehat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d; |\xi|^{2s} d\xi)$ donc il existe une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d; |\xi|^{2s} d\xi)$ telle que la suite $(\widehat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers φ dans $L^2(\mathbb{R}^d; |\xi|^{2s} d\xi)$. Montrons que φ est une distribution tempérée, que $f := \mathcal{F}^{-1}\varphi$ appartient à $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. Puisque $s < d/2$ on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_{B(0,1)} |\varphi(\xi)| d\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\varphi(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(0,1)} |\xi|^{-2s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

On en déduit que $\mathbf{1}_{B(0,1)}\varphi$ appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$. Comme $\mathbf{1}_{cB(0,1)}\varphi$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d; \langle \xi \rangle^{2s} d\xi)$ on obtient que φ est une distribution tempérée. Soit $f := \mathcal{F}^{-1}\varphi$, alors f appartient à $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et on a bien que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ puisque $(\widehat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers φ dans $L^2(\mathbb{R}^d; |\xi|^{2s} d\xi)$. Donc $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est complet si $s < d/2$.

Dans le cas où $s \geq d/2$ on considère la fonction sur $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$

$$\phi : f \longmapsto \|\widehat{f}\|_{L^1(B(0,1))} + \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}.$$

On constate facilement que ϕ est une norme sur $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et que $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach pour cette norme. En considérant l'application identité

$$(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d), \phi) \longrightarrow (\dot{H}^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)})$$

qui est linéaire, continue et surjective on constate que si l'espace $(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)})$ était complet, alors il existerait par le théorème de l'application ouverte une constante C telle que

$$\forall f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d), \quad \phi(f) \leq C \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)},$$

ce qui impliquerait que

$$\exists C > 0, \quad \forall f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d), \quad \|\widehat{f}\|_{L^1(B(0,1))} \leq C \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Nous allons montrer que cette inégalité est fautive grâce à l'exemple suivant : soit \mathcal{C} une couronne de \mathbb{R}^d centrée en 0, incluse dans la boule unité $B(0,1)$, telle que $\mathcal{C} \cap 2\mathcal{C} = \emptyset$ et soit la suite

$$f_n := \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{q=1}^n \frac{2^{q(s+\frac{d}{2})}}{q} \mathbf{1}_{2^{-q}\mathcal{C}} \right).$$

Alors l'hypothèse $\mathcal{C} \cap 2\mathcal{C} = \emptyset$ permet d'écrire que

$$\|\widehat{f}_n\|_{L^1(B(0,1))} = C_1 \sum_{q=1}^n \frac{2^{q(s-\frac{d}{2})}}{q}, \quad C_1 := |\mathcal{C}|$$

et

$$\|f_n\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_s \sum_{q=1}^n \frac{1}{q^2} \leq C', \quad C_s := \int_{\mathcal{C}} |\eta|^{2s} d\eta,$$

et comme $s \geq d/2$ on en déduit que $\|\widehat{f}_n\|_{L^1(B(0,1))}$ tend vers l'infini avec n alors que $\|f_n\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}$ est bornée. La proposition suit. \square

Exercice. Soient r, s et t trois réels.

- a) Si $s < t$ alors $H^t(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d)$ et cette inclusion définit une application linéaire continue : on a

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{H^t(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall f \in H^t(\mathbb{R}^d).$$

- b) Si $r < s < t$ alors $\dot{H}^r \cap \dot{H}^t(\mathbb{R}^d) \subset \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta} \|f\|_{\dot{H}^t(\mathbb{R}^d)}^{\theta}, \quad \forall f \in \dot{H}^r \cap \dot{H}^t(\mathbb{R}^d),$$

avec $s = (1-\theta)r + \theta t$.

- c) L'application linéaire

$$f \in H^{-s}(\mathbb{R}^d) \mapsto L_f \in (H^s(\mathbb{R}^d))^*,$$

où L_f est la forme (anti)-linéaire définie par

$$L_f(\varphi) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(\xi) \overline{\mathcal{F}\varphi(\xi)} d\xi,$$

est un isomorphisme linéaire isométrique entre l'espace $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et le dual topologique $(H^s(\mathbb{R}^d))^*$ de $H^s(\mathbb{R}^d)$.

- d) Si $|s| < d/2$, l'application linéaire

$$f \in \dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^d) \mapsto L_f \in (\dot{H}^s(\mathbb{R}^d))^*$$

où L_f est la forme (anti)-linéaire définie par

$$L_f(\varphi) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(\xi) \overline{\mathcal{F}\varphi(\xi)} d\xi$$

est un isomorphisme linéaire isométrique entre l'espace $\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et le dual topologique $(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d))^*$ de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$.

Proposition C.7.3. Pour tout entier k , l'espace $H^k(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont toutes les dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre k sont dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et l'on a

$$\|f\|_{H^k(\mathbb{R}^d)}^2 \sim \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Démonstration. On rappelle que $\partial^\alpha f$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $\xi^\alpha \mathcal{F}f$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme pour tout entier k il existe une constante C telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$C^{-1} \left(1 + \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2\right) \leq \langle \xi \rangle^{2k} \leq C \left(1 + \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2\right),$$

la proposition suit. \square

Proposition C.7.4. Soit k un entier et $\sigma \in]0, 1[$ un réel. Posons $s = \sigma + k$, alors

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 \sim \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|\partial^\alpha f(x+y) - \partial^\alpha f(x)|^2}{|y|^{d+2\sigma}} dx dy.$$

Ce résultat est une conséquence directe de la proposition suivante.

Proposition C.7.5. Soit $s \in]0, 1[$ un réel. Alors l'espace $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)$ et il existe une constante C telle que

$$\forall f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d), \quad \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}^2 = C \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|f(x+y) - f(x)|^2}{|y|^{d+2s}} dx dy. \quad (C.3)$$

Démonstration. Le fait que f appartienne à $L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)$ est simplement une conséquence du fait que

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,1)} \mathcal{F}f) + \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{cB(0,1)} \mathcal{F}f).$$

En effet $\mathbf{1}_{B(0,1)} \mathcal{F}f$ est une distribution à support compact donc $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,1)} \mathcal{F}f)$ est de classe C^∞ et donc dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs comme $s \geq 0$ on a que $\mathbf{1}_{cB(0,1)} \mathcal{F}f$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$ et donc $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{cB(0,1)} \mathcal{F}f)$ aussi. Montrons l'égalité (C.3). On a par le Théorème de Plancherel C.4.1

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+y) - f(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |e^{iy \cdot \xi} - 1|^2 |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|f(x+y) - f(x)|^2}{|y|^{d+2s}} dx dy = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} L(\xi) |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi$$

avec $L(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{iy \cdot \xi} - 1|^2}{|y|^{d+2s}} dy.$

Comme la fonction L est radiale et homogène de degré $2s$ elle est proportionnelle à $|\xi|^{2s}$, et la proposition suit. \square

Corollaire C.7.6. Soit $0 \leq s < k$ avec k entier, et soit φ un C^k difféomorphisme global sur \mathbb{R}^d . Si $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors $f \circ \varphi \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la formulation fournie par la Proposition C.7.4 et d'effectuer un changement de variable. \square

Proposition C.7.7. Pour tout réel s , l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace dense de $H^s(\mathbb{R}^d)$. Pour tout réel $s < \frac{d}{2}$, l'espace $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dont la transformée de Fourier est identiquement nulle près de l'origine est un sous-espace dense de $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. L'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ étant un espace de Hilbert, il suffit de vérifier que l'orthogonal de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour le produit scalaire de $H^s(\mathbb{R}^d)$ est réduit à $\{0\}$. Supposons donc qu'il existe une distribution f dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ telle que pour toute fonction φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on ait

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{2s} \mathcal{F}f(\xi) \overline{\mathcal{F}\varphi(\xi)} = 0.$$

Alors l'application $\xi \mapsto \langle \xi \rangle^{2s} \mathcal{F}f(\xi)$ est identiquement nulle dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, donc $\mathcal{F}f \equiv 0$ et donc $f \equiv 0$.

De même supposons qu'il existe une distribution f dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ telle que pour toute fonction φ de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ on ait

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} \mathcal{F}f(\xi) \overline{\mathcal{F}\varphi(\xi)} d\xi = 0.$$

Alors $\mathcal{F}f$ s'annule sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et donc $\mathcal{F}f \equiv 0$. Le résultat suit puisque $s < d/2$ et donc $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert. \square

Proposition C.7.8. *La multiplication par une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une application continue de $H^s(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même pour tout réel s .*

Démonstration. On sait que

$$\mathcal{F}(\varphi f) = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{F}\varphi \star \mathcal{F}f$$

donc la démonstration de la proposition se réduit à l'estimation de la norme $L^2(\mathbb{R}^d)$ de la fonction

$$u(\xi) := \langle \xi \rangle^s \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}\varphi(\xi - \eta)| |\mathcal{F}f(\eta)| d\eta.$$

Vérifions tout d'abord que pour tout réel s , il existe une constante C telle que

$$\langle \xi \rangle^s \leq C \langle \xi - \eta \rangle^{|s|} \langle \eta \rangle^s.$$

En effet quitte à échanger ξ et η on peut supposer que $s \geq 0$ et l'on a

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle^s &\leq C(1 + |\xi - \eta|^2 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} \\ &\leq C' \langle \xi - \eta \rangle^s \langle \eta \rangle^s. \end{aligned}$$

On a donc

$$|u(\xi)| \leq C' \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi - \eta \rangle^{|s|} |\mathcal{F}\varphi(\xi - \eta)| \langle \eta \rangle^s |\mathcal{F}f(\eta)| d\eta$$

et l'inégalité de Young

$$\|g \star h\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^1} \|h\|_{L^2} \tag{C.4}$$

permet de conclure que

$$\|\varphi f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq 2^{\frac{|s|}{2}} \|\langle \xi \rangle^{|s|} \mathcal{F}\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

L'inégalité (C.4) s'obtient en remarquant que pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, par les théorèmes de Fubini et Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int g \star h(x) f(x) dx &= \iint g(y) h(x-y) f(x) dx dy \\ &\leq \int |g(y)| \int |h(x-y)| |f(x)| dx dy \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|h\|_{L^2} \int |g(y)| dy = \|f\|_{L^2} \|h\|_{L^2} \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

La proposition est démontrée. \square

C.7.2. Injections de Sobolev.

Théorème C.7.9 (Injections de Sobolev - le cas C^k). Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier. Pour tout réel $s > \frac{d}{2} + k$ on a

$$H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^k(\mathbb{R}^d).$$

Plus précisément toute fonction $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ est égale presque partout à une fonction de $C^k(\mathbb{R}^d)$, et il existe une constante C ne dépendant que de d, k et s telle que pour toute fonction $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial^\alpha f(x)| \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$. Comme $s > \frac{d}{2} + k$, la fonction

$$\xi \mapsto \frac{(i\xi)^\alpha}{\langle \xi \rangle^s}$$

appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}f = \frac{(i\xi)^\alpha}{\langle \xi \rangle^s} \langle \xi \rangle^s \mathcal{F}f$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$. On en déduit que la distribution tempérée $\partial^\alpha f$ s'identifie en fait à une fonction continue et

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) d\xi$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On a alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial^\alpha f(x)| \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

avec

$$C := \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{2(k-s)} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le théorème est démontré. \square

Théorème C.7.10 (Injections de Sobolev - le cas L^p). Si $s \in]0, d/2[$ alors les espaces $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ sont continûment inclus dans $L^{\frac{2d}{d-2s}}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Tout d'abord notons que si $s > 0$ alors $H^s(\mathbb{R}^d)$ est continûment inclus dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ donc il suffit de montrer le résultat pour $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. On remarque ensuite qu'un argument d'échelle permet de trouver l'exposant $p = 2d/(d - 2s)$. Soit en effet f une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et posons f_ℓ la fonction $f_\ell(x) := f(\ell x)$ (avec $\ell > 0$). Pour tout $p \in [1, \infty[$ on a

$$\begin{aligned} \|f_\ell\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \ell^{-\frac{d}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \text{et} \\ \|f_\ell\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}f_\ell(\xi)|^2 d\xi \\ &= \ell^{-2d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}f(\ell^{-1}\xi)|^2 d\xi \\ &= \ell^{-d+2s} \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Si l'inégalité $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}$ est vraie pour toute fonction régulière f , elle est vraie aussi pour f_ℓ pour tout $\ell > 0$. Cela conduit à la relation $p = 2d/(d - 2s)$.

Démontrons à présent le théorème. On va supposer que f est une fonction de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ (le résultat suivra par densité) et pour simplifier les calculs on suppose sans perte de généralité que $\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = 1$.

Commençons par observer que pour tout $p \in [1, +\infty[$, grâce au théorème de Fubini on a pour toute fonction mesurable f ,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \\ &= p \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{|f(x)|} \Lambda^{p-1} d\Lambda dx \\ &= p \int_0^\infty \Lambda^{p-1} \mu(\{x \in \mathbb{R}^d / |f(x)| > \Lambda\}) d\Lambda, \end{aligned}$$

où μ est la mesure de Lebesgue. Nous allons décomposer f en basses et hautes fréquences (pour chaque Λ) en écrivant $f = f_b + f_{\sharp}$, avec

$$f_b := \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,A)} \mathcal{F}f) \quad \text{et} \quad f_{\sharp} := \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{cB(0,A)} \mathcal{F}f), \quad (\text{C.5})$$

où la constante $A > 0$ dépend de Λ et sera déterminée plus tard. Comme le support de la transformée de Fourier de f_b est compact, la fonction f_b est bornée. On a plus précisément en appliquant la transformée de Fourier inverse et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|f_b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq (2\pi)^{-d} \|\mathcal{F}f_b\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq (2\pi)^{-d} \int_{B(0,A)} |\xi|^{-s} |\xi|^s |\mathcal{F}f(\xi)| d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-d} \left(\int_{B(0,A)} \frac{d\xi}{|\xi|^{2s}} \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\|f_b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C_s A^{\frac{d}{2}-s}. \quad (\text{C.6})$$

Par l'inégalité triangulaire on a

$$\{x \in \mathbb{R}^d / |f(x)| > \Lambda\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d / 2|f_b(x)| > \Lambda\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d / 2|f_{\sharp}(x)| > \Lambda\}.$$

Grâce à (C.6) on a

$$A = A_\Lambda := \left(\frac{\Lambda}{4C_s} \right)^{\frac{2}{d}} \implies \mu(\{x \in \mathbb{R}^d / |f_b(x)| > \Lambda/2\}) = 0.$$

On en déduit avec ce choix de $A = A_\Lambda$ que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p \leq p \int_0^\infty \Lambda^{p-1} \mu(\{x \in \mathbb{R}^d / |f_{\sharp}(x)| > \Lambda/2\}) d\Lambda.$$

Il est bien connu (c'est l'inégalité de Bienaimé–Tchebychev) que

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \mathbb{R}^d / |f_{\sharp}(x)| > \Lambda/2\}) &= \int_{\{x \in \mathbb{R}^d / |f_{\sharp}(x)| > \Lambda/2\}} dx \\ &\leq \int_{\{x \in \mathbb{R}^d / |f_{\sharp}(x)| > \Lambda/2\}} \frac{4|f_{\sharp}(x)|^2}{\Lambda^2} dx \\ &\leq \frac{4}{\Lambda^2} \|f_{\sharp}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p \leq 4p \int_0^\infty \Lambda^{p-3} \|f_{\sharp}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 d\Lambda,$$

et donc

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p \leq 4p(2\pi)^{-d} \int_0^\infty \Lambda^{p-3} \int_{|\xi| \geq A_\Lambda} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi d\Lambda. \quad (\text{C.7})$$

Par définition de A_Λ on a

$$|\xi| \geq A_\Lambda \iff \Lambda \leq 4C_s |\xi|^{\frac{d}{p}}.$$

Alors le théorème de Fubini implique que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p &\leq 4p(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{4C_s |\xi|^{\frac{d}{p}}} \Lambda^{p-3} d\Lambda \right) |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{4p}{p-2} (2\pi)^{-d} (4C_s)^{p-2} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{\frac{d(p-2)}{p}} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Comme $2s = \frac{d(p-2)}{p}$ le théorème est démontré, par densité de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. \square

Par dualité on peut démontrer le corollaire suivant.

Corollaire C.7.11. *Si p appartient à $]1, 2]$, alors*

$$L^p(\mathbb{R}^d) \subset \dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \quad \text{avec} \quad s = -d \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right).$$

Démonstration. Notons que puisque p appartient à $]1, 2]$, alors $-d/2 < s \leq 0$. Écrivons

$$\|a\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\|\varphi\|_{\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)} \leq 1} \langle a, \varphi \rangle.$$

Comme $-s = d \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) = d \left(\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right)$, on a $\|\varphi\|_{\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)} \geq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}$, et donc

$$\begin{aligned} \|a\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} &\leq C \sup_{\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq 1} \langle a, \varphi \rangle \\ &\leq C \|a\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Cela conclut la démonstration. \square

C.7.3. Trace et relèvement.

Théorème C.7.12 (Théorème de trace et relèvement). *Soit $d \geq 2$ et $s > 1/2$. L'application linéaire (dite de trace)*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1}) \\ f &\longmapsto \gamma(f) \end{aligned}$$

avec

$$\gamma(f)(x_1, \dots, x_{d-1}) := f(x_1, \dots, x_{d-1}, 0)$$

se prolonge en une application linéaire continue surjective

$$\gamma : H^s(\mathbb{R}^d) \longrightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}),$$

et il existe une application linéaire continue (dite de relèvement)

$$R : H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^d)$$

telle que $\gamma \circ R = Id_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}$.

Démonstration. Notons $x' := (x_1, \dots, x_{d-1})$. On a pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\|\gamma(f)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} = \left\| \langle \xi' \rangle^{s-\frac{1}{2}} \mathcal{F}(\gamma(f)) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}$$

et

$$\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi) d\xi_d.$$

En effet

$$\begin{aligned} f(x', 0) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ix' \cdot \xi'} \mathcal{F}f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int e^{ix' \cdot \xi'} \left(\frac{1}{2\pi} \int \mathcal{F}f(\xi', \xi_d) d\xi_d \right) d\xi' \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi) d\xi_d.$$

Mais par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi) d\xi_d \right|^2 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi_d \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_d}{\langle \xi \rangle^{2s}} \right) \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi_d \right) \langle \xi' \rangle^{1-2s} \end{aligned}$$

avec

$$C := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\zeta}{\langle \zeta \rangle^{2s}}$$

et donc puisque $s > 1/2$ il vient

$$\|\gamma(f)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C' \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2.$$

On conclut par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ que l'opérateur de trace γ peut bien être défini sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ et que son image est dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$. Pour montrer que γ est surjective définissons un opérateur de relèvement

$$R : H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^d) \quad \text{tel que} \quad \gamma \circ R = \text{Id}.$$

Pour cela on considère une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi(0) = 1$ et l'on pose, pour g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$,

$$\begin{aligned} Rg(x) &:= \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \chi(x_d \langle \xi' \rangle) \mathcal{F}g(\xi') d\xi' \\ &= \mathcal{F}_{\xi' \rightarrow x'}^{-1} (\chi(x_d \langle \xi' \rangle) \mathcal{F}g(\xi')). \end{aligned}$$

On a clairement $\gamma \circ Rg = g$ et

$$\mathcal{F}(Rg)(\xi) = \frac{1}{\langle \xi' \rangle} (\mathcal{F}_{x_d \rightarrow \xi_d} \chi) \left(\frac{\xi_d}{\langle \xi' \rangle} \right) \mathcal{F}g(\xi'),$$

donc

$$\|Rg\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi' \rangle^{-2} |(\mathcal{F}_{x_d \rightarrow \xi_d} \chi)(\langle \xi' \rangle^{-1} \xi_d)|^2 |\mathcal{F}g(\xi')|^2 d\xi.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \|Rg\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \langle \xi' \rangle^{-2s-1} \langle \xi \rangle^{2s} (\mathcal{F}_{x_d \rightarrow \xi_d} \chi)(\langle \xi' \rangle^{-1} \xi_d) d\xi_d \right) \langle \xi' \rangle^{2s-1} |\mathcal{F}g(\xi')|^2 d\xi' \\ &\leq C \|g\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}^2 \end{aligned}$$

avec

$$C := \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}\chi(\zeta)|^2 \langle \zeta \rangle^{2s} d\zeta.$$

Le théorème est démontré. \square

Remarque. On peut définir plus généralement un opérateur de trace pour toute hypersurface régulière Σ de \mathbb{R}^d en utilisant la stabilité de $H^s(\mathbb{R}^d)$ par composition par des difféomorphismes (Corollaire C.7.6) ainsi que la Proposition C.7.8 qui permettent de localiser et redresser le bord.

C.7.4. Espaces de Sobolev sur un ouvert de \mathbb{R}^d .

Définition C.7.13 (Espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$). Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , k un entier, et p un réel dans $[1, \infty]$. L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega) / \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k \right\}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

On montre facilement que $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, réflexif si $1 < p < \infty$ et séparable si $1 \leq p < \infty$. L'espace de Sobolev $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable, muni du produit scalaire

$$(f|g)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha f | \partial^\alpha g)_{L^2(\Omega)}.$$

L'espace suivant est particulièrement utile.

Définition C.7.14. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . L'espace $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $H^1(\Omega)$. L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace $H_0^1(\Omega)$ au sens où

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq 1} \langle f, \varphi \rangle.$$

Proposition C.7.15 (Inégalité de Poincaré). Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d . Il existe une constante C telle que pour toute fonction f de $H_0^1(\Omega)$ on ait

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. On écrit tout élément $x \in \Omega$ sous la forme $x = (x', x_d)$ avec $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ et l'on a

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x_d} \partial_{y_d} f(x', y_d) dy_d$$

donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient (parce que Ω est borné)

$$|f(x)|^2 \leq C \int |\nabla f(x', y_d)|^2 dy_d$$

et le résultat suit par intégration, et par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. \square

Proposition C.7.16 (Inégalités de Gagliardo–Nirenberg). Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et soit $p \in [2, \infty[$ tel que $1/p > 1/2 - 1/d$. Il existe une constante C telle que pour toute fonction f dans $H_0^1(\Omega)$,

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^{1-\sigma} \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}^\sigma \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{d(p-2)}{2p}. \quad (\text{C.8})$$